Matemáticas detrás del Cubo Rubik

Arte Mayor Del Cubo

RESÚMEN

El libro Arte Mayor Del Cubo, escrito por Luis Emilio Álvarez Herrera en 2018, relata diversos métodos para resolver diferentes tipos de cubos rubik de las categorías oficiales de la WCA (World Cube Association); Así cómo un recorrido en las matemáticas que puede obtenerse de este icónico juguete ochentero: La teoría de grupos y conjuntos, combinatoria, permutaciones y algoritmos son las ramas más representativas.

Sobre el cuadernillo de ejercicios, contiene una base sólida de teoría y práctica, es decir el manual para su resolución, ejemplos, rutinas de práctica, recopilación de consejos por el autor y material visual. Mucho de este material ya está disponible en el canal de youtube “Chapingo Open”. En el presente artículo se explica más a fondo los temas matemáticos del cubo rubik.

ABSTRACT

The book Arte Mayor Del Cubo, written by Luis Emilio Álvarez Herrera in 2018, relates various methods for solving different types of rubik's cubes from the official categories of the WCA (World Cube Association); As well as a journey in mathematics that can be obtained from this iconic eighties toy: The theory of groups and sets, combinatorics, permutations and algorithms are the most representative branches.

The exercise booklet contains a solid base of theory and practice, that is, the manual for its resolution, examples, practice routines, a compilation of advice by the author and visual material. Much of this material is already available on the YouTube channel “Chapingo Open”. This article explains more about the mathematical topics of the rubik's cube.

PALABRAS CLAVE / Cubo Rubik / Matemáticas/ Educación / Club de Ciencias Netzahualpilli / Teoría de grupos

INTRODUCCIÓN

En mi enseñanza, disfrutaba creando modelos para comunicar claramente mis pensamientos (Rubik,1980).

En México, el cubo se ha hecho muy popular en las escuelas, Es por eso que su análisis matemático es importante para que al exponerlo, se pueda potenciar la lógica entre la comunidad estudiantil. Dicho lo cual, se expone un manual para que se pueda enseñar matemáticas con el cubo Rubik. El libro está segmentado en dos secciones Teorico-practicos:

La enseñanza del arte mayor del cubo.

En esta parte del libro se expone material visual, ejercicios e información para resolver el cubo rubik 3x3 en cinco segundos. Los objetivos generales son el desarrollo de mejores tomas de decisiones, reflejos, atención, paciencia, disciplina, memoria y creatividad.

Las matemáticas detrás del hexaedro regular.

En esta sección se localizan varios artículos sobre matemáticas así como juegos y ejercicios (Con distintos niveles de complejidad, desde primaria hasta licenciatura) relacionadas al cubo. El principal objetivo es el fomento de las matemáticas en México por los resultados OCDE: El 57% de los estudiantes mexicanos de 15 años tiene habilidades matemáticas deficientes y 42% en lectura (prueba PISA, 2015).

El cubo Rubik

El cubo fue creado en 1974 por el arquitecto húngaro Erno Rubik y la creadora del método más veloz que lleva su nombre; la ingeniera checa Jessica Fridrich. Debido a su invención, se crea el speedcubing en 1981 cuando en un concurso de la “WCA” se hizo la dinámica de resolver el cubo en el menor tiempo posible.

MÉTODO

● TEORÍA DE GRUPOS

GRUPOS

La colección de todas las posibles permutaciones de ***n*** elementos forman un **grupo**. Un grupo es un conjunto de **elementos** que satisfacen varias condiciones. Utilizamos estas condiciones implícitamente cada vez que realizamos permutaciones, por lo que es mejor establecerlas explícitamente ahora.

- ❑ Cualquiera de los dos elementos en el grupo se pueden **combinar**, ésto da como resultado otro elemento del grupo. En los algoritmos se pueden combinar dos permutaciones realizando una después de la otra. Si P y Q son permutaciones, entonces PQ significa la permutación resultante de realizar primero P y luego Q. Combinar dos elementos de un grupo se llama **multiplicación de los dos elementos**.
- ❑ Hay una **identidad**: En un grupo, el elemento I es una "permutación" que no mueve nada. Entonces el elemento I unido al elemento P resulta **PI** = **IP** = **P**.
- ❑ Cada elemento tiene una **inversa**: Si P es un elemento del grupo, entonces hay un elemento Q en el grupo tal que **PQ** = **QP** = I. La inversa de la permutación P se denota por P'. Por ejemplo P=(**R U R' U'**) → P'= (**U R U' R'**)
- ❑ La multiplicación es **asociativa**: Si **P, Q** y **R** son elementos del grupo, entonces (**PQ**) **R** = P (**QR**). Si un grupo es conmutativo, es decir, si tenemos PQ = QP para cada P, Q en el grupo, se llama grupo abeliano. Este fenómeno ocurre en Rubiks Clocks, y hace que estos rompecabezas sean mucho más simples porque el orden en el que se realizan los movimientos no importa. Generalmente los grupos de permutación que ocurren en rompecabezas no son abelianos.

Todos los movimientos posibles de las piezas en el cubo de Rubik también forman un grupo y la orientación de las piezas es importante sin embargo las posiciones no forman un grupo (a menos que se marquen a las piezas centrales para que puedan distinguirse).

SUBGRUPOS

El grupo de **cubos de Rubik** se genera mediante los movimientos {F, B, R, L, U, D}, por definición, cualquier movimiento de las piezas se realiza moviendo las caras de una en una. Las permutaciones que los movimientos dobles (F2) generan un grupo porque cualquiera de las dos permutaciones hechas a partir de dobles giros, se combinará para dar otra permutación hecha a partir de medias vueltas. Este grupo se suele llamar el **Grupo Cuadrado.**

El grupo Cuadrado es un subgrupo del Grupo de Cubos. De las cuatro condiciones enumeradas anteriormente que definen un grupo, solo tenemos que marcar la primera, que al combinar dos permutaciones del grupo cuadrado también se obtiene una posición que se puede resolver utilizando solo movimientos cuadrados. Las otras tres condiciones se heredan automáticamente del grupo de cubos completo.

Hay muchos patrones en el grupo cuadrado. **El patrón de 4 puntos**, por ejemplo, se puede hacer por **R2 L2 U2 R2 B2 R2 L2 F2 L2 U2**, son 10 vueltas dobles . Se puede alcanzar en menos turnos si permite que el cubo abandone temporalmente el grupo cuadrado mediante giros sencillos. El punto 4 se puede alcanzar en 8 turnos con **R2 L2 U D' F2 B2 U D '** .

Hay otros subgrupos interesantes del grupo de cubos, por ejemplo, el grupo de **slice** (generado por todos los movimientos: FB', RL', UD'), el grupo **antislice** (generado por todos los movimientos: FB, RL, UD) y muchos otros.

CENTROS

Un subgrupo en particular es el centro del Grupo de Cubos. Consta de todos los elementos que se **conmutan**: Si C se encuentra en el centro, entonces CP = PC para todos los elementos P en el grupo. Eso implica que PCP'=C, el elemento C no cambia bajo ninguna **conjugación**. Los únicos elementos en el centro son, la identidad I y el Superflip que voltea los 12 aristas. El **superflip** se puede hacer por la secuencia: (**U R2 F B R B2 R U2 L B2 R U' D' R2 F).** El hecho de que el Superflip conmute todas las aristas, puede aprovecharse para algunos trucos de magia.

- **TEORÍA DE CONJUNTOS SOBRE EL CUBO 3X3**

El conjunto de secuencias de movimientos realizables en el cubo de Rubik "$\mathbb{G}$", junto con la operación de composición de secuencias "$*$" constituye un grupo algebraico. satisface las propiedades de grupo:

- ❑ Existe un elemento identidad e que consiste en no hacer ninguna secuencia y se suele identificar con el cubo en su posición resuelta.
- ❑ Dadas dos secuencias A, $B \in \mathbb{G}$, que pueden ser simplemente el giro de dos caras, la secuencia $A * B$ también es una secuencia del cubo: $A * B \in \mathbb{G}$.
- ❑ Como todas las caras pueden girar en ambos sentidos, cualquier secuencia es invertible, pues es una combinación de giros de caras:

$$\forall\ M \in \mathbb{G}, \exists M' \in \mathbb{G} : M * M' = M' * M = e,$$

(donde el apóstrofe denota una secuencia antihoraria.)

- ❑ La propiedad asociativa también se satisface:

$$\forall\ A, B, C \in \mathbb{G}, (A*B)*C = A*(B*C),$$

(que puede deducirse de los giros de 90 grados.)

Este grupo no es abeliano: si consideramos una pieza del cubo, su posición final no será la misma si giramos primero la cara de la derecha y luego la superior (RU) que si giramos primero la superior y luego la derecha (UR ≠ RU). $\mathbb{G}$ es subgrupo del grupo simétrico S_{48}. La razón es que disponemos de 48 stickers que podemos permutar, aunque no todas las permutaciones son posibles. La teoría de representaciones del grupo simétrico tiene aplicaciones en mecánica cuántica, en concreto para el estudio de partículas idénticas. ***Todo grupo finito es un subgrupo de un cierto grupo simétrico*** (teorema de Cayley). También tenemos grupos discretos en cristalografía: las estructuras cristalinas presentan simetrías espaciales periódicas descritas por un cierto grupo y que nos permiten simplificar el problema.

Por definición, $\mathbb{G}$ es un grupo de permutación. La acción de $\mathbb{G}$ sobre un conjunto X es una función $f : \mathbb{G} \times X \mapsto X$ que cumple:

- ❑ $f(e, x) = x, \forall\ x \in X,$

❑ $f(A, f(B, x)) = f(AB, x), \forall A, B \in \mathbb{G}, x \in X$.

Si $X \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto formado por 48 puntos, que podemos identificar con los stickers de un cubo, la actuación del grupo de Rubik sería la de permutar los elementos de X de modo que se reordenen formando una posición física del cubo de Rubik dada una cierta secuencia.

Es en este punto donde las cosas se ponen interesantes. Como ahora el número de elementos es enorme, una representación regular es intratable, pero podemos emplear una representación $8 \otimes 12$ de dimensión 96 que consiste en matrices de permutación para los 8 vértices y las 12 aristas, con la orientación adecuada de ambas. Las aristas admiten dos orientaciones distintas y los vértices tres. Para describirlas, vamos a recurrir al anillo modular, pues, para los vértices multiplicamos por 2 para cada orientación:

$$\begin{gathered} 1 \bmod 7 = 1, \\ 2 \bmod 7 = 2, \\ 4 \bmod 7 = 4, \\ 8 \bmod 7 = 1, \\ \vdots \end{gathered}$$

y para aristas multiplicamos por 6:

$$\begin{gathered} 1 \bmod 7 = 1, \\ 6 \bmod 7 = 6, \\ 36 \bmod 7 = 1, \\ \vdots \end{gathered}$$

Además, las posibles orientaciones cumplen unas ciertas restricciones que debemos tener en cuenta: por ejemplo, no podemos tener una única arista desorientada. Veamos un ejemplo interesante: todo elemento de G constituye un subgrupo cíclico, es decir, que aplicado d veces vuelve a la posición original. Este número d es conocido como el orden del ciclo y el elemento con el orden mayor es T = R U2 D′ B D′, con orden 1260. En forma matricial:

$$\pi : (3^7 : S_8) \times (2^{11} : S_{12})(\mathrm{F}_7).$$

$$
T = \mathrm{R\ U2\ D'\ B\ D'} = \begin{pmatrix}
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0
\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$T^{1260} = \mathbb{1}.$$

Aunque no lo vamos a demostrar, esta representación es irreducible. El grafo de Cayley correspondiente al cubo de Rubik tiene un total de V = |G| vértices. Vamos a asignarle como conjunto de generadores el giro de caras permitiendo que un doble giro se considere un único movimiento. A esto se le conoce como HTM (Half-Turn Metric):S_{HTM} = {L, L′, L2, R, R′, R2, U, U′, U2, D, D′, D2, F, F′, F2, B, B′,B2}.

Tenemos un total de 18 generadores, lo cual quiere decir que de cada vértice salen 18 aristas. Otra opción sería considerar únicamente giros de 90 grados, de modo que un doble giro se considere como dos movimientos:

(QTM, Quarter-Turn Metric):SQTM = {L, L′, R, R′, U, U′, D, D′, F, F′, B, B′}.

Nosotros vamos a considerar únicamente el conjunto HTM. Aunque no podemos representar este grafo tan grande, podemos investigar sus propiedades.

- **DEMOSTRACIÓN DE LOS ESTADOS POSIBLES**

¿Es posible aprenderse todos los estados del cubo 3x3?, ¿qué tan probable es resolverlo al girar aleatoriamente? El cubo Rubik es un arquetipo para los estudiantes de combinatoria porque en él se puede interpretar y descubrir la realidad matemáticamente. Pero, ¿cómo saber cuántos casos existen? Solo se necesita hacer multiplicaciones y comprender la estructura de cada pieza.

ESQUINAS

Hay ocho de estas piezas, eso implica que los ocho espacios pueden ocuparse de distintas formas. En matemáticas se puede traducir a **8!** (ocho factorial), es decir multiplicar de 8*7*6*...*2*1. Por ejemplo, en un puzzle con 3 esquinas (A, B, C), habría 3! permutaciones posibles para estas piezas.

$$3! = 3*2*1=6$$

A	**A**	**B**	**B**	**C**	**C**
B	**C**	**A**	**C**	**A**	**B**
C	**B**	**C**	**A**	**B**	**A**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Volviendo al cubo 3x3, la orientación en esquinas si importa; entonces cada una tiene 3 colores y 8 posiciones posibles, por tanto se calcula con el factor $\mathbf{3^8}$ (3*3*3*3*3*3*3*3). Por ejemplo, en un pin de 4 dígitos habría 10 000(10^4) posibilidades, ya que en cada dígito puede haber 10 números diferentes (0, 1, 2... 9) y hay 4 dígitos. En nuestro caso el 10 representaría las orientaciones posibles de cada esquina y el 4, el número de ellas.

Siguiendo este principio, las esquinas pueden combinarse de ($\mathbf{8!*3^8}$) formas. Sin embargo, estamos contando de más: las paridades son producto de girar una esquina manualmente. Dicho lo cual, solo un tercio de todos los casos pueden existir. A la fórmula se le debe agregar la división:

$$\frac{(8!\cdot 3^8)}{3}$$

ARISTAS

Hay 12 de estas piezas, por lo que habrá **12!** formas diferentes de combinarlas y cada una tiene 2 orientaciones posibles, entonces son $\mathbf{2^{12}}$ maneras de combinarlas.

Una vez más, falta descontar los estados de paridad: no puede haber una arista volteada ó dos aristas contiguas permutadas . Entonces solo la mitad de las orientaciones son posibles.

$$\frac{(12!\cdot 2^{12})}{2}$$

La siguiente tabla muestra los cuatro eventos posibles de la combinación de esquinas y aristas, donde "X" indica que esa pieza está mal orientada al llegar al estado "resuelto" y " • ", lo contrario.

<table>
<tr><th>esquina</th><th>arista</th><th></th></tr>
<tr><td>X</td><td>•</td><td rowspan="2">Ya hemos descontado estos casos</td></tr>
<tr><td>•</td><td>X</td></tr>
<tr><td>•</td><td>•</td><td rowspan="2">Por descontar, implica la mitad</td></tr>
<tr><td>X</td><td>X</td></tr>
</table>

Uniendo las dos piezas notables, la fórmula se condensa así:

$$\frac{(12!\cdot 2^{12})\,(8!\cdot 3^{8})}{12} = 43,252,003,274,489,856,000$$

CENTROS

Hay cubos donde los centros son parte de la resolución, es por eso que también lo tomaremos en cuenta; Las piezas centrales, al contrario de las esquinas y aristas, no tienen la capacidad de desplazarse por el cubo, Por otra parte, cada centro puede ser orientado de 4 formas diferentes y hay 6 de estas piezas, se expresa cmo 4^6. Para uso estético en la fórmula, dicha expresión es equivalente a 2^{12}.

$$\frac{(12!\cdot 2^{24})\,(8!\cdot 3^{8})}{12} = 1,7716\,X10^{\,23}$$

- **FÓRMULA PARA CALCULAR LAS COMBINACIONES DE UN CUBO:**

Para evitar contar todas las restricciones como paridades o estados que rompen ciclos, se pudo generalizar con una fórmula para cualquier número de piezas:

$$\frac{8!\cdot 37(12n-24(\frac{n}{2})!\cdot(2^{10(n-2(\frac{n}{2}))})(24!)(\frac{n-2}{2})(1+(\frac{n-2}{2}))}{(24^{6(\frac{n-2}{2})(\frac{n-2}{2})}(24+46(\frac{n}{2})-23n)} =$$

A continuación, sustituyamos los valores de n por los números de piezas que hay en el vértice, hagámoslo con un cubo 4x4:

$$\frac{8!\cdot\ 3^7(12(4)-24(\frac{4}{2}))!\cdot(2^{10(4-2(\frac{4}{2}))})(24!)^{(\frac{4-2}{2})(1+(\frac{4-2}{2}))}}{(24^{6(\frac{4-2}{2})(\frac{4-2}{2})}(24+46(\frac{4}{2})-23(4))} =$$

$$\frac{8!\ 3^7(48-48)!\cdot(2^{10(4-4)})(\ 24!^{(\frac{2}{2})(1+(\frac{2}{2}))})}{(24^{6(\frac{2}{2})(\frac{2}{2})}(24+46(2)-92)} =$$

$$\frac{8!\ 3^7(1)\cdot(2^0)(\ 24!^2)}{24^7} =$$

$$\frac{8!\cdot\ 3^7\cdot 24!^2}{24^7} = 7.401196841564901...\times\ 10^{45}$$

Sin embargo, es una fórmula poco práctica, por lo que podemos derivar dos fórmulas para cuando *n* es par (lado izquierdo) o cuando *n* es impar:

$$\frac{8!\cdot 3^7\cdot 2^{10}(24!)^{\frac{n(n-2)}{4}}}{24^{\frac{3n^2-12n+9}{2}}} \qquad \frac{8!12!\ 3^7\ 2^{10}(24!)^{n^2-2n-3}}{24^{\frac{3n^2-12n+9}{2}}}$$

Valor de n	Número de combinaciones
1	1
2	3,674,160
3	$43\cdot\ 10^{18}$
4	$74\cdot\ 10^{44}$
10	$83\cdot\ 10^{348}$

BIBLIOGRAFÍA

- pBorrajo, D. (2019). El cubo de Rubik y la mecánica cuántica. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid,3-8.https://www.ucm.es/data/cont/docs/1461-2019-02-04-Memoria%20charla%20cubo%20Rubik.pdf

- José María, B. (2017). Nomenclatura del cubo de 3x3x3. Madrid, España: iberorubik.com. https://www.iberorubik.com/tutoriales/3x3x3/nomenclatura/.

- Matt, K. (2019). How to Solve a Rubik's Cube Blindfolded. EU: teachkidsengineering.com https://teachkidsengineering.com/solve-rubiks-cube-blindfolded/

- Olson, C. (2013). CLL. Minnesota, USA: cyotheking.com. http://www.cyotheking.com/cll2-2

- Olson, C. (2013). EG-2. Minnesota, USA: cyotheking.com. http://www.cyotheking.com/cll2

- Olson, C.(2013). EG-1. Minnesota, USA: cyotheking.com. http://www.cyotheking.com/cll2-1

- OMM. (2016). Nivel estatal.Ciudad De México. Ciudad de México, México:ommenlinea.org. http://www.ommenlinea.org/material-de-entrenamiento/nivel-estatal/

- OMM. (2017). Engargolado. Ciudad de México, México:ommenlinea.org. http://www.ommenlinea.org/publicaciones/engargolado/

- Rubik,E. (1982).The World Championship, Budapest 1982.Budapest, Hungría: worldcubeassociation.org. https://www.worldcubeassociation.org/competitions/WC1982

- Santos, P. (2007). Brazil Open 2007. São Paulo Brasil: worldcubeassociation.org. https://www.worldcubeassociation.org/competitions/BrazilOpen2007

- Scherphuis, J. (2015). Useful Mathematics. EU: jaapsch.net/puzzles/. https://www.jaapsch.net/puzzles/theory.htm#size

- World Cube Association. (1982). WCA Regulations. EU: worldcubeassociation.org. https://www.worldcubeassociation.org/regulations/

- Zamora, A. (2008). Mexican Open 2008. Ciudad de México, México: worldcubeassociation.org.https://www.worldcubeassociation.org/competitions/MexicanOpen2008

- Zemdegs, F. (2017). OLL Algorithms. Melbourne, Australia: cubeskills.com.https://www.cubeskills.com/tutorials/oll-algorithms

- Zemdegs, F. (2017). PLL Algorithms. Melbourne, Australia: cubeskills.com.https://www.cubeskills.com/tutorials/pll-algorithms

- Zemdegs, F. (2017). F2L Algorithms (Different slot positions). Melbourne, Australia:cubeskills.com.https://www.cubeskills.com/tutorials/f2l-algorithms-different-slot-positions.